**Фильтры**

Фильтр - это частотно-избирательное устройство, которое пропускает сигналы определенных частот и задерживает или ослабляет сигналы других частот [1,2,6,9,10,11]. Фильтры могут быть классифицированы по ряду признаков:

- по виду амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) они разделяются на: фильтры нижних частот (ФНЧ); фильтры верхних частот (ФВЧ); полосовые фильтры (ПФ); режекторные (заграждающие) фильтры (РЖ); резонансные фильтры (РЗ). В отдельную группу могут быть выделены фазовые фильтры (ФФ);

- в зависимости от полиномов, используемых при аппроксимации передаточной функции, различают фильтры: критического затухания, Бесселя, Баттерворта, Чебышева;

- по элементной базе они разделяются на: пассивные и активные. Активные фильтры включают в схему *RLC* – фильтра активные элементы, в качестве которых используются операционные усилители.

**Основные характеристики и параметры фильтров.** К характеристикам фильтров относятся: передаточная функция, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), фазо-частотная характеристика (ФЧХ), частота среза *ωср* (*fср* ), постоянная времени *τ*, полоса пропускания (подавления) *Δω* (*Δf*), резонансная частота, добротность.

Передаточная функция это отношение величины выходного напряжения к величине входного напряжения фильтра

 . (9.1)

В общем случае фильтр можно рассматривать как четырехполюсник с передаточной функцией

 , (9.2)

где *U1(p)* и *U2(p)* – входное и выходное напряжение четырехполюсника в операторной форме; *a* и *b* – вещественные постоянные величины; *m, n* = 1,2,3, …; *n* – определяет порядок фильтра.

Для установившейся частоты *р=jω,* и передаточную функцию можно привести к виду

. (9.3)

Модуль передаточной функции (9.3) *называется амплитудно-частотной характеристикой*

 . (9.4)

*Фазо-частотная* характеристика также может быть найдена из (9.3) и представлена в виде

 . (9.5)

Диапазон *Δω* = *ω2 – ω1* или полосы частот, в которых проходят сигналы, называются *полосами пропускания*. В полосе пропускания значение коэффициента передачи фильтра относительно велико и в идеальном случае постоянно. Для полосового фильтра частоты *ω1* и *ω2* определяются при спаде коэффициента передачи на 3 дБ (или по абсолютной величине в  раза).

Диапазон частот *Δω = ω2 – ω1*, в которых сигналы подавляются, образуют *полосу задержания*. В ней коэффициент передачи фильтра относительно мал и в идеальном случае равен нулю. Для заграждающего фильтра частоты *ω1* и *ω2* определяются при спаде коэффициента передачи на 3 дБ (или по абсолютной величине в  раза).

*Частота среза ωср (fср )* – частота, на которой наблюдается спад коэффициента передачи на 3 дБ по сравнению с коэффициентом передачи на нулевой (для ФНЧ) или бесконечной (для ФВЧ) частоте.

*Резонансная частота fр* – частота, на которой коэффициент передачи фильтра имеет максимальное значение (для полосового фильтра) или минимальное значение (для заграждающего фильтра).

*Добротность Q* - добротность полосового фильтра определяется как отношение резонансной частоты к полосе пропускания

 . (9.6)

**Фильтры нижних частот**

Фильтр нижних частот является схемой, которая без изменений передает сигналы нижних частот, а на высоких частотах обеспечивает затухание сигналов и запаздывание их по фазе относительно входных сигналов.

**Пассивные фильтры нижних частот первого порядка**



Рис.9.1. Пассивный ФНЧ первого порядка

На рис.9.1. изображена схема простого *RС*-фильтра нижних частот первого порядка. Коэффициент передачи в комплексном виде может быть выражен формулой:

 . (9.7)

Отсюда получим формулы для АЧХ и ФЧХ:

 . (9.8)

Положив , получим выражение для частоты среза *ωср* :

 . (9.9)

| К | = 1 = 0 дБ на нижних частотах *f << fср*.

На высоких частотах *f >>fср* согласно формуле (9.8) |К| ≈ 1/ (*ωRC*), т.е. коэффициент передачи обратно пропорционален частоте. При увеличении частоты в 10 раз коэффициент усиления уменьшается в 10 раз, т. е. он уменьшается на 20 дБ на декаду или на 6 дБ на октаву. при *f = fср*.

Пример расчета пассивного ФНЧ первого порядка.

Произведем расчет коэффициента передачи по формуле 9.8. Для этого примем, что R = 1 кОм и С = 1 мкФ. Будем принимать частоту от 0,001 Гц до 100 кГц с шагом 10. Получаем следующие расчеты коэффициента передачи фильтра:

 

Рис.9.2. Зависимость коэффициента передачи фильтра ФНЧ от частоты

Построим график зависимости коэффициента передачи от частоты (рис.9.2).

Таким образом, видим, что ФНЧ обеспечивает нормальное прохождение низких частот и задерживает верхние частоты.

Для более быстрого уменьшения коэффициента передачи можно включить *n* фильтров нижних частот последовательно. При последовательном соединении нескольких фильтров нижних частот частота среза приближенно определяется как

 *.* (9.10)

Для случая *n* фильтров с равными частотами среза

 . (9.11)

При частоте входного сигнала *fвх>> fср* для схемы (рис.9.1) получим

 . (9.12)

Из (9.12) видно, что ФНЧ может выступать как интегрирующее звено.

Для переменного напряжения, содержащего постоянную составляющую, выходное напряжение можно представить в виде

 , (9.13)

где - среднее значение.

Фильтр нижних частот может выступать в качестве детектора средних значений.

Для реализации общего подхода к описанию фильтров необходимо нормировать комплексную переменную р:

 . (9.14)

Для фильтра рис.9.1 получим Р = рRC и

 . (9.15)

Используя передаточную функцию для оценки амплитуды выходного сигнала от частоты, получим

 . (9.16)

Передаточная функция ФНЧ в общем виде может быть записана в виде , (9.17)

где с1, с2 ,…, сn– положительные действительные коэффициенты.

Порядок фильтра определяется максимальной степенью переменной Р. Для реализации фильтра необходимо разложить полином знаменателя на множители. Если среди корней полинома есть комплексные, в этом случае следует записать полином в виде произведения сомножителей второго порядка

 , (9.18)

где *аi* и *bi*– положительные действительные коэффициенты. Для нечетных порядков полинома коэффициент *b1* равен нулю.

**Активные фильтры нижних частот первого порядка**

Простой фильтр, изображенный на рис.9.1, обладает недостатком: свойства фильтра зависят от нагрузки. Для устранения этого недостатка фильтр необходимо дополнить преобразователем полного



 Рис.9.3. Активный ФНЧ первого порядка с

 преобразователем полного сопротивления

сопротивления. Схема фильтра с преобразователем полного сопротивления показана на рис.9.3. Коэффициент передачи постоянного сигнала может быть задан выбором значений резисторов R2 и R3:

 . (9.19)

Для упрощения схемы ФНЧ можно использовать RC-цепь для обратной связи операционного усилителя. Подобный фильтр показан на рис.9.4.

 Рис.9.4. Активный ФНЧ первого порядка

Передаточная функция фильтра (рис.9.4) имеет вид

 . (9.20)

Для расчета фильтра необходимо задать частоту среза *fср (ωср)*, коэффициент передачи постоянного сигнала К0 (для схемы на рис.9.4 он должен быть задан со знаком минус) и емкость конденсатора С1. Приравняв коэффициенты полученной передаточной функции коэффициентам выражения 9.18 для фильтра первого порядка, получим

 . (9.21)

**Пассивный фильтр нижних частот второго порядка**

На основании выражения (9.18) запишем в общем виде передаточную функцию ФНЧ второго порядка

 . (9.22)

Такая передаточная функция не может быть реализована с помощью пассивных RC-цепей. Подобный фильтр может быть реализован с применением индуктивностей. На рис.9.5 показана схема пассивного ФНЧ второго порядка.

Рис.9.5. Пассивный ФНЧ второго порядка

Передаточная функция фильтра имеет вид

 . (9.23)

Рассчитать фильтр можно, воспользовавшись формулами

 . (9.24)

Например, для ФНЧ второго порядка типа Баттерворта с коэффициентами *а1* = 1,414 и *b1* = 1,000, задав частоту среза *fср*= 10 Гц и емкость *С* = 10мкФ, из (9.24) получим *R* = 2,25 кОм и *L* = 25,3 Гн.

Подобные фильтры неудобны для реализации из-за слишком большой индуктивности. Заданную передаточную функцию можно реализовать с помощью операционного усилителя с соответствующими *RC* – цепями, что позволяет исключить индуктивности.

**Активные ФНЧ второго порядка**

Примером активного ФНЧ второго порядка является фильтр со сложной отрицательной обратной связью, схема которого показана на рис. 9.6. Передаточная функция данного фильтра имеет вид

 . (9.25)



Рис.9.6. Активный ФНЧ второго порядка

Для расчета фильтра можно записать . (9.26) При расчете схемы лучше задавать значения емкостей конденсаторов и вычислять необходимые значения сопротивлений:

 ;

 . (9.27)

Для того, чтобы значение сопротивления R2 было действительным, должно выполняться условие

 . (9.28)

Фильтры с отрицательной ОС имеют с высокую добротность.

Активный ФНЧ второго порядка может быть построен на основе ОУ с омической отрицательной обратной связью и на основе ОУ с положительной обратной связью. Примеры подобных фильтров показаны на рис.9.7 и рис.9.8.



|  |  |
| --- | --- |
| Рис.9.7 Активный ФНЧ второго порядка с омической отрицатель-  ной ОС | Рис.9.8 Активный ФНЧ второго порядка с  положительной ОС |

**Фильтры верхних частот**

Используя логарифмическое представление, можно перейти от нижних частот к верхним, зеркально отобразив АЧХ коэффициента передачи относительно частоты среза, т.е. заменив Ω на 1/Ω или P на 1/P. При этом частота среза остается неизменной, а *К0* переходит *К∞.* При этом получим

 . (9.29)

**Пассивные ФВЧ первого порядка**



Рис.9.9. Пассивный ФВЧ первого порядка

Схема простого пассивного ФВЧ первого порядка приведена на рис. 9.9. ФВЧ передает без изменения сигналы высоких частот, а на низких частотах обеспечивает затухание сигналов и опережение их по фазе относительно входных сигналов. Коэффициент передачи в комплексной форме может быть записан в виде

 . (9.30)

Отсюда находим выражения для АЧХ, ФЧХ и частоты среза

 . (9.31)

При *f = fср*, как и для фильтра нижних частот,

 .

Если приложено входное напряжение с частотой *f<<fср*, то , и из уравнения

 (9.32)

получим

 . (9.33)

Таким образом, входные напряжения низкой частоты дифференцируются, т.е. ФВЧ может выступать как дифференцирующий преобразователь.

При последовательном соединении нескольких ФВЧ результирующая частота среза

 . (9.34)

Если все фильтры имеют равные частоты среза, то

 . (9.35)

Пример расчета пассивного ФВЧ первого порядка.

Произведем расчет коэффициента передачи по формуле 9.31. Для этого примем, что *R* = 1 кОм и *С* = 10 мкФ. Будем принимать частоту от 0,001 Гц до 100 кГц с шагом 10. Получаем следующие расчеты коэффициента передачи фильтра:

Построим график зависимости коэффициента передачи от частоты (рис.9.10):

 

 Рис.9.10. Зависимость коэффициента передачи фильтра от частоты

Таким образом, видим, что ФВЧ обеспечивает нормальное прохождение высоких частот и задерживает низкие частоты.

**Активные ФВЧ первого порядка**

Пример схемы активного ФВЧ первого порядка представлен на рис.9.11.



Рис.9.11. Активный ФВЧ первого порядка

Передаточная функция данного фильтра имеет вид

 . (9.36)

Используя выражение (9.29), получим

 . (9.37)

**Пассивные и активные ФВЧ второго порядка**

Передаточная функция ФВЧ второго порядка имеет вид

 . (9.38)

Для реализации пассивного ФВЧ второго порядка достаточно в схеме рис.9.5 поменять местами конденсатор и RL-цепь.

Примером реализации активного ФВЧ второго порядка может быть ФВЧ, показанный на рис.9.12, который получается заменой в схе­­ме ФНЧ на рис.9.7 емкостей *С1* и *С2* на сопротивления, а сопротивления *R1* и *R2* на емкости.



Рис.9.12. Активный ФВЧ второго порядка

Передаточная функция фильтра , 9.39)

где *а* – коэффициент усиления.

Приняв *а* =1 и *С1* = *С2* = *C*, можно получить формулы для расчета фильтра

 . (9.40)

Отсюда получим

 .

**Полосовые фильтры**

 Путем замены переменной *Р* в передаточной функции ФНЧ на переменную (*1/ΔΩ)(P+1/P*) можно получить АЧХ полосового фильтра. В результате этого преобразования АЧХ фильтра нижних частот в диапазоне 0 ≤ *Ω* ≤ 1 переходит в правую часть полосы пропускания полосового фильтра (1 ≤ *Ω* ≤ *Ω*max). Левая часть полосы пропускания является зеркальным отображением в логарифмическом масштабе правой части относительно средней частоты полосового фильтра *Ω* = 1 (рис. 9.13). При этом *Ωmin* = *1/ Ωmax*. Вычисление нормированных частот среза полосового фильтра, на которых его коэффициент передачи уменьшается на 3 дБ, может быть осуществлено из

 (9.41)

формулы, которая получается при

 .



Рис.9.13. АЧХ полосового фильтра

**Пассивный полосовой RC-фильтр**

Путем последовательного соединения ФВЧ и ФНЧ получают полосовой фильтр. Его выходное напряжение равно 0 на высоких и низких частотах.

Выходное напряжение полосового RC-фильтра

 . (9.42)

 

 Рис.9.14. Пассивный полосовой RC-фильтр (а) и его АЧХ (б)

Коэффициент усиления

  . (9.43)

Отсюда модуль коэффициента усиления и фазовый сдвиг

  ,  . (9.44)

Выходное напряжение максимально при *ωRC* = 1, следовательно, резонансная частота

 ; (9.45)

 - нормированная частота.

Фазовый сдвиг на резонансной частоте равен 0. Коэффициент усиления *K*р = 1/3.

Если в схеме рис.9.14 заменить сопротивления на индуктивность, то получим схему пассивного полосового LC-фильтра (рис.9.15).

 

Рис.9.15. Схема пассивного полосового LC-фильтра (а) и его АЧХ (б)

При совпадении частот, на которых наблюдается резонанс напряжений в последовательном контуре L1C1 и резонанс токов в параллельном колебательном контуре L2C2, сопротивление продольного плеча L1C1 оказывается минимальным, а поперечного L2C2 – максимальным. Коэффициент передачи ПФ при этом имеет наибольшее значение. При отклонении частоты входных колебаний от резонансной частоты ƒ0 коэффициент передачи ПФ уменьшается (рис. 9.15,б).

**Заграждающие полосовые фильтры**

АЧХ заграждающего фильтра может быть получена из частотной характеристики ФНЧ путем замены переменной *Р* выражением *ΔΩ/(P+1/P)*. Здесь *ΔΩ = 1/Q* нормированная полоса частот. *Q* = *fр/(fmax – fmin) = fр/Δf*, где *Δf* – полоса частот, на краях которой коэффициент передачи падает на 3 дБ (Q – добротность подавления сигнала).

Как и в случае полосовых фильтров при преобразовании порядок фильтра удваивается. Так при преобразовании передаточной функции ФНЧ первого порядка получим заграждающий фильтр второго порядка с передаточной функцией

 . (9.46)

Отсюда получим выражения для АЧХ и ФЧХ фильтра

 . (9.47)

**Пассивный заграждающий RLC-фильтр**

Пример пассивного заграждающего фильтра приведен на рис. 9.16. Передаточная функция такого фильтра имеет вид

 . (9.48)



Рис.9.16. Схема заграждающего RLC-фильтра

Резонансная частота и добротность подавления находятся как

 . (9.49)

Примерами пассивных заграждающих фильтров являются также мост Вина – Робинсона (рис. 9.17) и двойной Т-образный мост (рис. 9.18).

**Мост Вина-Робинсона**



Рис.9.17. Схема фильтра Мост Вина-Робинсона

Омический делитель напряжения обеспе­чивает частотно-независимое напряжение, равное 1/3*Uвх*.

При этом на резонансной частоте выходное напряжение равно 0. В отличие от полосового фильтра АЧХ коэффициента усиления на резонансной частоте имеет минимум. Схема применима для подавления сигналов в определенной частотной области.

Коэффициент передачи

  ; (9.50)

Фазовый сдвиг

 . (9.51)

**Двойной Т-образный фильтр**

Двойной Т-образный фильтр обладает частотной характеристикой, идентичной характеристике моста Вина-Робинсона.

 

 Рис.9.18. Двойной Т-образный фильтр (а) и его АЧХ (б)

В отличие от моста Вина-Робинсона выходное напряжение снимается относительно общей точки.

Для высоких и низких частот *Uвых=Uвх*.

Сигналы высоких частот будут полностью передаваться через два конденсатора *С*, а низких через резистор *R*.

Коэффициент передачи и фазовый сдвиг:

  ,  . (9.52)

Добротность данных фильтров мала. Она может быть повышена, если включить их в цепь обратной связи усилителя.